Het geheim van de gulden snede

De gulden snede duikt op allerlei onverwachte plaatsen op, zoals in de architectuur, bij de lengte van je vingerkootjes, bij een bloemkool, bij Tom Cruise of bij Shakira. Lees hieronder wat de gulden snede is, en hoe je zelf de gulden snede kunt ontdekken.

De gulden snede is een stukje eeuwenoude raadselachtige wiskunde. De gulden snede of 'Divina Proportia' (goddelijke proportie) kort men af met de Griekse letter Φ (spreek uit: 'Fie'). Φ heeft niets met π te maken. π ken je wel van de wiskundeles. Het drukt de verhouding van de diameter van een cirkel uit in relatie tot de omtrek en heeft als waarde 3,14. Φ geeft een verhouding van lijnstukken aan - vandaar de Engelse naam: The Golden Ratio.

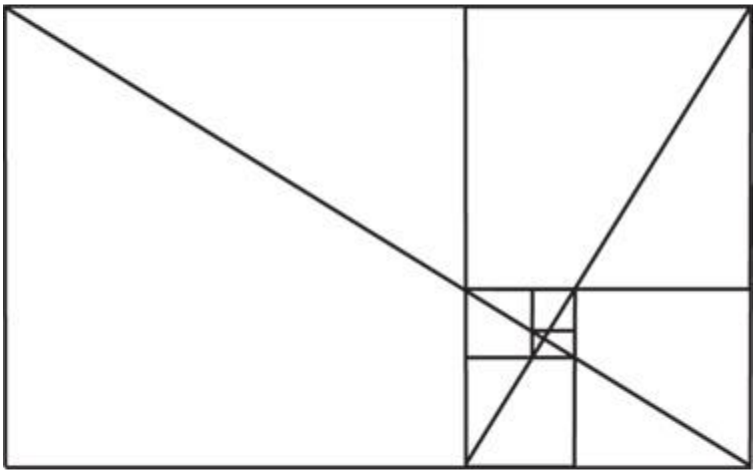
Sommige onderzoekers denken dat de beroemde piramides van de oude Egyptenaren zijn gebouwd op basis van het getal Φ.
Bron: www.istockphoto.com/Julia Chernikova

De Griekse wijsgeer Euclides beschreef als eerste het getal Φ, maar men gebruikte de gulden snede waarschijnlijk al eerder. De oude Egyptenaren bouwden hun piramides op basis van de gulden snede. Ook in het Parthenon, een tempel ter ere van de godin van welvaart en vrede Athena, kun je Φ terugvinden. Φ is ook op andere plaatsen te ontdekken: bijvoorbeeld in de verhouding tussen de lengte van het middelste botje in je vinger tot het langste botje en het kortste botje. Ook in het hartslagpatroon - zichtbaar gemaakt op een ECG - is tussen de hartslagen de verhouding van Φ terug te vinden. In de vroege middeleeuwen bedacht Fibonacci het antwoord op de vraag waarom deze verhouding zo vaak terug te vinden is.

Het oog van God

Bekijk onderstaande figuur eens. De verhouding van de zijdes van de grootste rechthoek bedraagt precies Phi. De op één na kleinste rechthoek begint op de langste zijden van de grootste rechthoek en je raadt het al, de verhouding van de deellijn bedraagt Φ. Op deze manier worden steeds kleinere rechthoeken getekend met de verhouding Φ. Deze verkleining gaat tot in het oneindige door. Vervolgens is van elke rechthoek de diagonaal getekend. Zoals je

ziet, snijden de diagonalen elkaar in hetzelfde punt. De wiskundige Pickover stelde voor dit snijpunt van diagonalen het 'Oog van God' te noemen.



Het snijpunt van de diagonalen van alle rechthoeken werd in de renaissance het 'Oog van God' genoemd. De rechthoeken verkleinen zich volgens Φ.
Bron: TJ

Vreemde rij

In 1202 publiceerde Leonardo Fibonacci een bijzondere rij getallen: elk getal van de rij (behalve de eerste twee) is gelijk aan de som van de twee voorgaande getallen. Dat levert de volgende rij getallen op: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, enzovoorts. De Fibonacci-reeks zit vol met eigenaardigheden, zoals elke optelsom van tien opeenvolgende getallen uit de reeks is deelbaar door elf (probeer maar eens). Om de zestig getallen herhaalt het laatste cijfer, bijvoorbeeld het tweede getal is 1, het tweeënzestigste getal in de reeks eindigt op een 1 (….4052739537881), het 122ste getal in de reeks eindigt op een ….. 1 (…..14028366653498915298923761), etc.

ratio	waarde
1/1	1.00000
2/1	2.00000
3/2	1.50000
5/3	1.66667
8/5	1.60000
13/8	1.62500
21/13	1.61538
34/21	1.61905
55/34	1.61765
89/55	1.61818

De Fibonacci-reeks vormt de rekenkundige basis voor de *gulden snede*. Dit is in 1611 ontdekt door de beroemde astronoom Johannes Kepler. Als je een getal uit de Fibonacci-reeks deelt door zijn voorganger uit de reeks, dan benadert de breuk het gulden-snede-getal Φ. In de tabel staan enkele getallen uit de Fibonacci-reeks gedeeld door het voorgaande getal, afgerond op vijf decimalen.

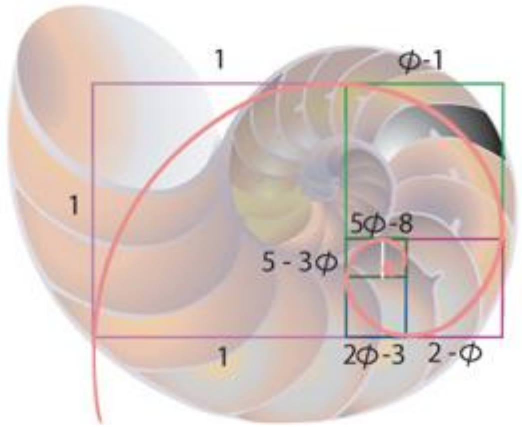
De Fibonacci-reeks komt in de natuur op allerlei onverwachte plaatsen voor. Als je bijvoorbeeld goed kijk naar de verdeling van de zonnebloemzaden in een zonnebloem, kun je spiralen zien waarvan sommige met de klok meedraaien en sommige tegen de klok in lopen. De grootte van de zonnebloem bepaalt het aantal spiralen. Meestal tel je 34 spiralen die de ene kant op wijzen en (je raadt het al) 55 die de andere kant op wijzen. Bestudeer eens een bloemkool van de bovenkant. Als je goed kijkt, kun je hier ook een spiralenpatroon zien (meestal 5 met de klok mee en 8 tegen de klok in). Ook de rangschikking van blaadjes rond de stengel van een plant volgt vaak de beroemde reeks. De blaadjes zitten niet allemaal aan dezelfde kant van een stengel, maar staan spiraalsgewijs om de stengel. Het aantal blaadjes per omloop volgt de Fibonacci-reeks, bijvoorbeeld per omwenteling om de stam staan twee blaadjes (1/2) of acht blaadjes per drie omwentelingen.

De zaden in een zonnebloem zijn volgens een patroon gerangschikt dat de Fibonacci-reeks volgt.
Bron: www.istockphoto.com/Lucinda Deitman

Wonderlijke spiraal

Deze logaritmische spiraal komt in de natuur veelvuldig voor. Deze wonderlijke spiraal (Spiralis Mirabilis) wordt ook wel de Spiraal van Archimedes genoemd. Archimedes was helemaal gebiologeerd door spiralen en schreef er zelfs een compleet boek over. Veel slakkenhuizen zijn volgens dit patroon opgebouwd. Ook de hoorns van bijvoorbeeld een ram volgen dit patroon, maar ook sterrenstelsels. Uit figuur 5 blijkt dat de Spiralis Mirabilis rechtstreeks uit Φ is afgeleid. Kunstenaars maken veelvuldig van de spiraal gebruik. In de krullen van Leda, op het

schilderij Leda en de zwaan van Leonardo da Vinci kun je ook de Spira mirabilis vinden.



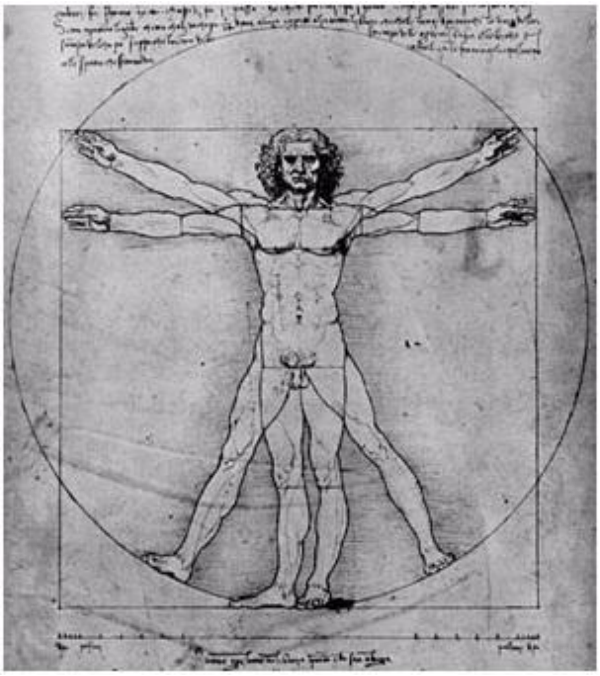
Uit de verkleiningsreeks van deze rechthoeken volgens de verhouding Φ volgt ook de Spira.
Bron: TJ

Knappe vriendin

Waarom stemt het ene schilderij meer met de werkelijkheid overeen dan een ander schilderij? Volgens Pacioli (1445- 1517) - een Italiaanse wiskundige kloosterling - komt dat doordat de schilder de wetten van de wiskunde gehoorzaamt. Diepte in een schilderij, de verdeling van ruimtelijke vlakken over het linnen, liggen volgens Pacioli allemaal vast in wiskundige verhoudingen zoals Φ. Hij schreef drie boeken (bekend onder de naam 'De Divina Proportione') waarin hij de schilderkunst tot wiskundige figuren en vergelijkingen probeerde terug te brengen. Ook schilders uit recentere tijden zoals Mondriaan gebruikten bewust dan wel onbewust de gulden snede.

Muziek en Fibonacci

Je verwacht het misschien niet, maar ook de muziekkunst kan niet zonder de beroemde Fibonacci-reeks. Bijvoorbeeld de opbouw van de pianotoetsen volgt de reeks. Een octaaf op een piano wordt gespeeld met 8 witte toetsen en 5 zwarte, in totaal dus 13 toetsen. De zwarte toetsen zijn verdeeld in twee en drie. Dus de Fibonacci-reeks: 2, 3, 5, 8, 13! Volgens sommigen te ver gezocht, anderen geloven er heilig in. Ook componisten zoals Bartók en Debussy hebben de Fibonacci-reeks (bewust of onbewust?) in hun werk verstopt.



Vitruviaanse figuur getekend door Leonardo da Vinci.

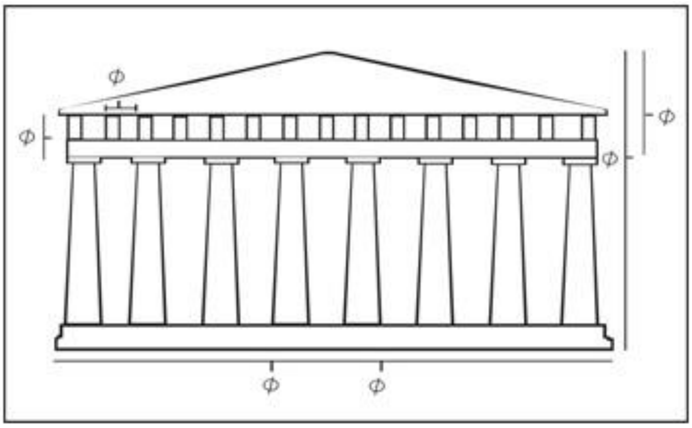
Niet alleen in de kunst kom je Φ tegen, ook menselijke schoonheid volgt de wetten van de gulden snede. In het menselijke gezicht vind je allerlei verhoudingen die de gulden snede benaderen. Bijvoorbeeld de verhouding van de lengte van je neus tot de breedte. Of de afstand tussen je ogen tot de totale breedte van je gezicht. Misschien verklaart het aantal gulden sneden die in het gezicht voorkomen, of iemand knap is of niet. Dus als je wilt weten of je een knappe vriend of vriendin aan de haak hebt geslagen, moet je op zoek naar de gulden snede in zijn of haar gezicht!

Deze lijn visualiseert de betekenis van Φ in de meetkunde. De verhouding van de lijnstukken AC/BC is gelijk aan de verhouding van de lijnstukken AB/AC.

Het wiskundige probleem waar Euclidus mee stoeide is weergegeven in bovenstaande figuur. Als we een rechte lijn in twee stukken willen verdelen, hoe lang moeten de lijnstukken zijn om ervoor te zorgen dat de verhouding tussen het grootste lijnstuk (AC) en het kleinste lijnstuk (BC) gelijk is aan de verhouding tussen het gehele deel (AB) en het grootste lijnstuk (AC)? Een wiskundige zou de vraag als volgt opschrijven: waar ligt punt C op de lijn AB zodat geldt: AC/BC = AB/AC? Stel dat de lengte van lijnstuk BC gelijk is aan 1 en die van AC gelijk aan x. We weten dat AC/BC = AB/AC, dus invullen levert op: $x / 1 = (x + 1) / x$. Kruiselings vermenigvuldigen levert op: $x^2 = x + 1$, oftewel $x^2 - x - 1 = 0$. Deze eenvoudige kwadratische vergelijking is eenvoudig met behulp van de abc-formule op te lossen. Er zijn twee oplossingen: $x_1 = (1 +$

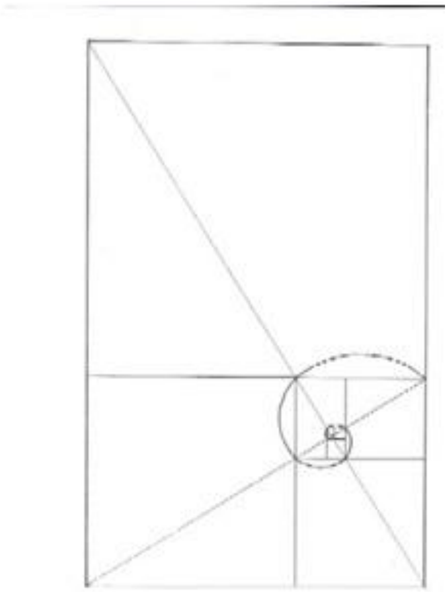
$\sqrt{5})/2$ en $x_2 = (1 - \sqrt{5})/2$. Even narekenen op het rekenapparaatje en je zult zien dat x_1 het getal 1,618 oplevert! De waarde x_2 is negatief, dus deze voldoet niet als lengte van een lijnstuk. Hiermee hebben we met eenvoudige wiskunde het bewijs geleverd voor het bestaan van Φ. Lijnstuk AC is dus 1,618⋯ keer zo lang als lijnstuk BC. En lijnstuk AB is 1,618⋯ keer zo lang als lijnstuk AC. Lijnstuk AC is dus 1,618 en wordt aangeduid met de Griekse letter Φ.

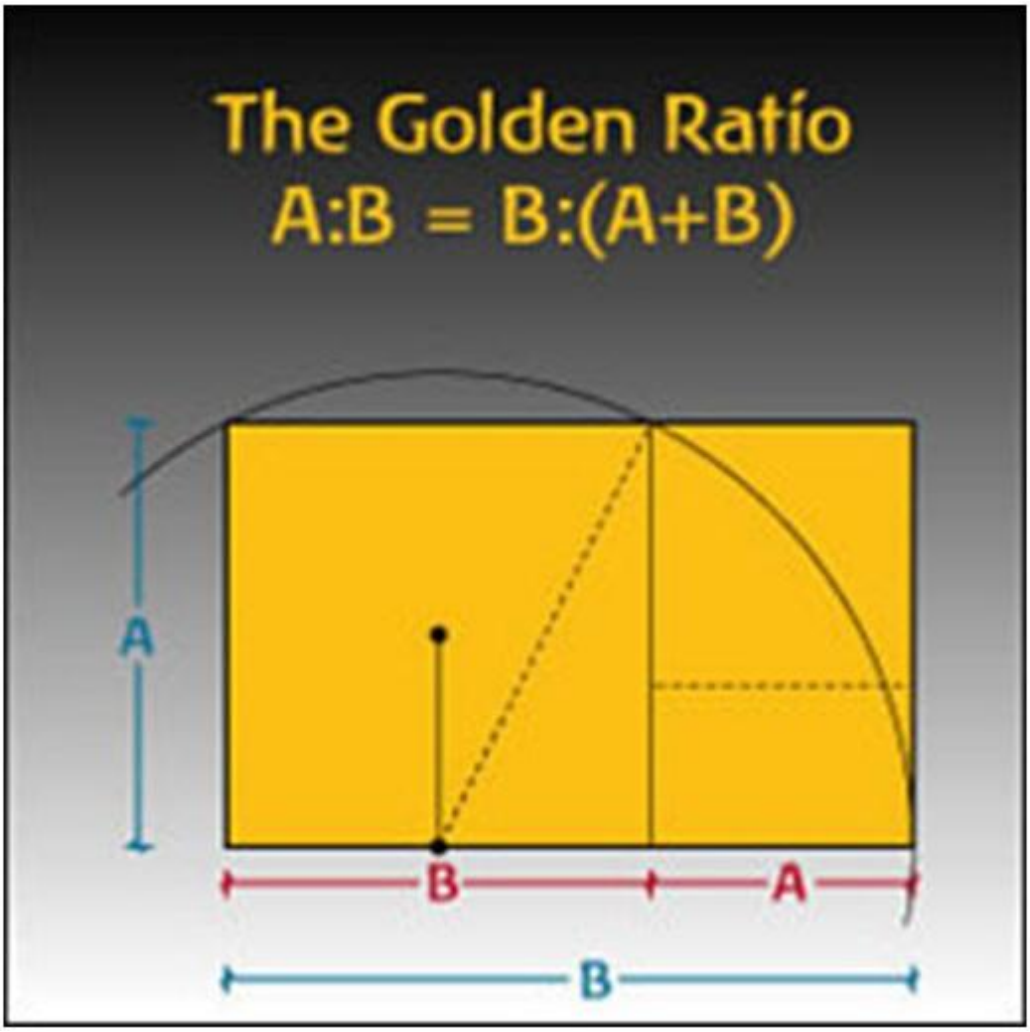
Tik het getal van Φ nog eens in je rekenmachine in (dus: 1,6180339887); bereken vervolgens het kwadraat (x^2 op je calculator) en daarna de reciproke waarde (de 1/x knop op je calculator). Wat valt je op? Als je het goed gedaan hebt, veranderen de cijfers achter de komma niet, alleen het getal voor de komma.



De architectuur van het Parthenon, waarvan de overblijfselen nog steeds in Athene te zien zijn, staan bol van Φ.

In de krullen van Leda, op het schilderij Leda en de zwaan van Leonardo da Vinci kun je ook de Spira mirabilis vinden.




The Golden Ratio
A:B = B:(A+B)
A
B
A
B

Het melkmeisje is één van Vermeers bekendere schilderijen. De onderkant van het raamkozijn valt in de gulden lijn, en de broodmand linksonder past in de fibonacci-spiraal.

Michelangelo en de Phi-ratio's in de menselijke hand